



ce
pre
UNI

Aritmética

RAZONES Y PROPORCIONES

**CICLO
PRE
2024 - I**



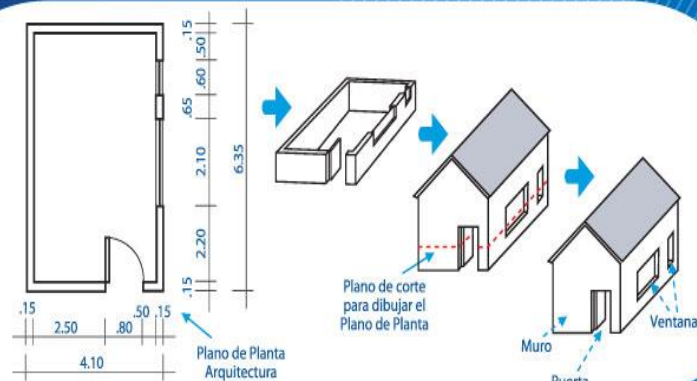
Esta semana estudiaremos las primeras herramientas matemáticas que nos ayudarán a responder a situaciones que nos plantea el mundo real, como por ejemplo, cuando queremos...



determinar cuántos segundos hay entre el primer y el segundo lugar en esta carrera,

DEL PLANO A LA VIVIENDA CONSTRUIDA

FIGURA 1



al diseñar una edificación, determinar cuál sería la escala adecuada a usar entre la medida del plano y la medida real,



o determinar el llenado efectivo en 1 hora de un tanque que tiene las dos válvulas abiertas.

RAZÓN

Es la comparación de dos cantidades, las razones pueden ser:

RAZÓN ARITMÉTICA

Es la comparación de las dos cantidades por diferencia.

$$a - b = r$$



a: antecedente

b: consecuente

r: valor de la razón aritmética

Ejemplo 1:

Una empresa necesita pintar su fachada y cuenta con dos pintores Pedro y Juan. Pedro puede hacer el trabajo en 18 días y Juan en 12 días. Si ambos tienen el mismo presupuesto, podemos afirmar lo siguiente:

$$\text{Razón Aritmética: } 18 - 12 = 6$$

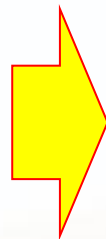
Interpretación:

❖ Los días que trabajaría Pedro excede a los días que trabajaría Juan en 6 días.

RAZÓN GEOMÉTRICA

Es la comparación de las dos cantidades por cociente.

$$\frac{a}{b} = k$$



a: antecedente

b: consecuente

k: valor de la razón geométrica

Ejemplo 2:

Con respecto al ejemplo 1, podemos afirmar lo siguiente:

Razón Geométrica: $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

Interpretación:

- ❖ Los días que trabajaría Pedro es a los días que trabajaría Juan como 3 es a 2.
- ❖ Los días que trabajarían Pedro y Juan están en la relación de 3 a 2.
- ❖ Los días que trabajarían Pedro y Juan son proporcionales a 3 y 2.

RAZÓN ARMÓNICA

Es la comparación de las inversas multiplicativas de dos cantidades, por medio de la sustracción.

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = q$$



a: antecedente

b: consecuente

q: valor de la razón armónica

Ejemplo 3:

Con respecto al ejemplo 1, podemos afirmar lo siguiente:

Razón Armónica: $\frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$

Interpretación:

- ❖ Lo que Juan realizaría en un día es $\frac{1}{36}$ más de lo que Pedro realizaría en un día.

Aplicación 1:

Se tiene una mezcla de agua con azúcar de concentración 0,75 gramos/litro. Al agregar agua se obtiene una mezcla de 1 litro con una concentración de 0,55 gramos/litro. Calcule la cantidad de agua (en litros) que se agregó. (Examen UNI 2023 II)

A) $\frac{5}{15}$

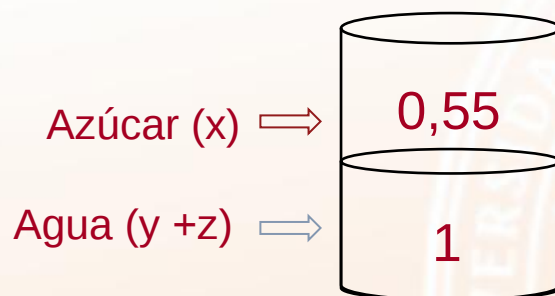
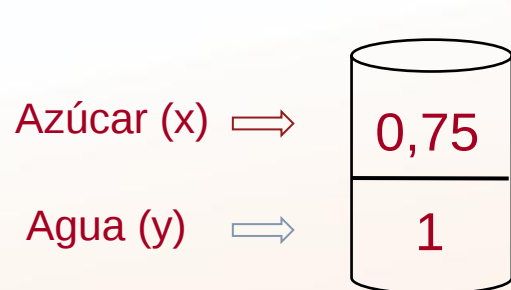
B) $\frac{4}{15}$

C) $\frac{3}{15}$

D) $\frac{2}{15}$

E) $\frac{1}{15}$

Resolución:



$$\frac{x}{y} = \frac{0,75}{1} = \frac{3 \times 11}{4 \times 11}$$

$$\frac{x}{y + z} = \frac{0,55}{1} = \frac{11 \times 3}{20 \times 3}$$

$$x = 33k$$

$$y = 44k$$

$$y + z = 60k = 1$$

$$\therefore Z = 16k$$

$$K = 1/60 \rightarrow z = 4/15$$

Aplicación 2:

Dos ciclistas A y B parten simultáneamente en sentidos opuestos de un mismo punto de una pista circular y se cruzan cuando a B le falta $\frac{1}{4}$ de vuelta para llegar al punto de partida. Si la pista fuera un triángulo equilátero de lado L , y parten de uno de los vértices en sentidos opuestos simultáneamente, cuando se crucen ¿Cuánto le faltaría a B para llegar al punto de partida?

A) $L/2$

B) $L/4$

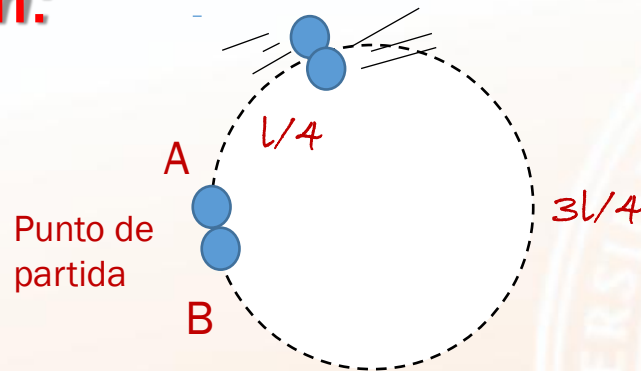
C) $3L/8$

D) $5L/8$

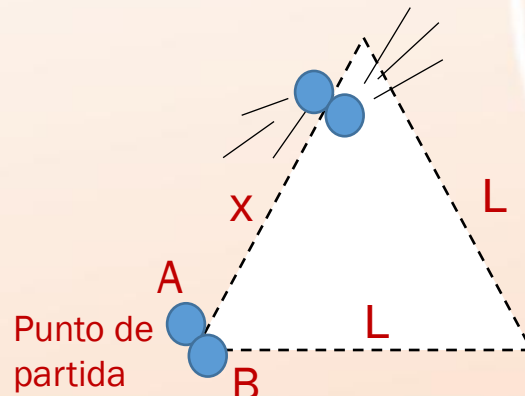
E) $3L/4$

Resolución:

Vemos:



$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{3L}{4}}{\frac{L}{4}} = 3$$



$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{X}{L - X} = 3$$

Rpta: $X = 3L/4$

PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones de la misma clase, se tendrá:

P. Aritmética	P. Geométrica	P. Armónica
$a - b = c - d$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$

En cualquiera de las tres proporciones se tiene:

- ❖ Los términos **a** y **c** son los **antecedentes**.
- ❖ Los términos **b** y **d** son los **consecuentes**.
- ❖ **a** y **d** se denominan **términos extremos**.
- ❖ **b** y **c** se denominan **términos medios**.

CASOS PARTICULARES : Según el valor de los términos medios.

A) PROPORCIÓN DISCRETA

(términos medios diferentes)

$24 - 15 = 21 - 12$	$\frac{24}{15} = \frac{16}{10}$	$\frac{1}{12} - \frac{1}{60} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$
Aritmética	Geométrica	Armónica
$a - b = c - d$ d: 4ta. aritmética (diferencial) de a, b y c.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ d: 4ta. geométrica (proporcional) de a, b y c.	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ d: 4ta. armónica de a, b y c.

B) PROPORCIÓN CONTINUA (términos medios iguales)

$24 - 15 = 15 - 6$	$\frac{18}{12} = \frac{12}{8}$	$\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} - \frac{1}{24}$
Aritmética	Geométrica	Armónica
$a - b = b - d$ d: 3ra. diferencial de a y b. b: media aritmética o diferencial de a y c.	$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$ d: 3ra. proporcional de a y b. b: media geométrica o proporcional de a y c.	$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{d}$ d: 3ra. armónica de a y b. b: media armónica de a y c

Aplicación 3:

En una proporción aritmética, los términos extremos están en la relación de 18 a 24 y los términos medios en la relación de 20 a 30. Calcule la suma de los términos de dicha proporción, si los consecuentes se diferencian en 72.

A) 1 050

B) 910

C) 840

D) 780

E) 650

Resolución:

Sea la proporción aritmética: $a - b = c - d \rightarrow a + d = b + c$

Por dato:

$$\frac{a}{d} = \frac{3.5k}{4.5k} \quad \frac{b}{c} = \frac{2.7k}{3.7k}$$

suma:

$$7.5k$$

$$5.7k$$

=



$$a = 15k ; b = 14k ; c = 21k ; d = 20k$$

Por dato: $d - b = 72$

$$20k - 14k = 72 \rightarrow k = 12$$

$\therefore$ Suma de los términos de la proporción:

$$a + b + c + d = 840$$

Aplicación 4:

En una proporción geométrica continua el primer término es $\frac{1}{16}$ del cuarto término.
Hallar el término medio de dicha proporción si la suma de las raíces cuadradas de los extremos es 10.

A) 4

B) 8

C) 12

D) 16

E) 20

Resolución:

Sea:

$$\frac{k}{b} = \frac{b}{16k}$$

$$\rightarrow b = 4k$$

además:

$$5\sqrt{k} = 10$$

$$\rightarrow k = 4$$

$$\therefore b = 16$$

Aplicación 5:

Con tres números naturales se escribe una proporción geométrica continua. La suma de dichos números es 28 y la suma de sus inversas es $7/16$. Determine el producto de dichos números.

A) 64

B) 128

C) 256

D) 512

E) 1 024

Resolución:

Sea la proporción geométrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} \rightarrow b^2 = a \cdot d$$

por dato: $a + b + d = 28$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{7}{16}$$

$$\rightarrow \frac{b^2 + bd + ad + ab}{abd} = \frac{7}{16}$$

además:

$$\frac{b(d + b + a)}{abd} = \frac{7}{16}$$

$$\rightarrow b = 8$$

$$a + d = 20$$

$$a \cdot d = 64 \rightarrow a = 16 ; d = 4$$

Rpta:

$$a \cdot b \cdot c = 512$$

MEDIA PARA DOS NÚMEROS REALES POSITIVOS

a) Media Aritmética:

$$a - b = b - d$$

(b es la media aritmética de a y d)



$$b = \frac{a + d}{2}$$

$$MA = \frac{a + d}{2}$$

b) Media Geométrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$$

(b es la media geométrica de a y d)



$$b = \sqrt{a \cdot d}$$

$$MG = \sqrt{a \cdot d}$$

c) Media Armónica:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{d}$$

(b es la media armónica de a y d)



$$b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{d}}$$

$$MH = \frac{2 \cdot a \cdot d}{a + d}$$

Propiedades de las medias para dos números reales positivos ($a \neq b$)

$$MH < MG < MA$$

$$MH \cdot MA = a \cdot b = MG^2$$

$$MA^2 - MG^2 = \left(\frac{a - b}{2} \right)^2$$

Aplicación 6:

La diferencia de los cuadrados de la MA y MG de dos números es 256, además la relación entre la MA y MH es 289 a 225. Determine la MA de la diferencia de los números y la suma de la MA y MG.

A) 36

B) 40

C) 45

D) 48

E) 50

Resolución:

$$MA^2 - MG^2 = \left(\frac{a - b}{2} \right)^2 = 256 \quad \dots (1)$$

por dato: $\rightarrow a - b = 32$

$$MA = 289k$$

$$MH = 225k \rightarrow MG = 17 \times 15 K$$

EN (1): $K = 2 / 17$

$$MA = \frac{a + b}{2} = 34 \rightarrow a + b = 68$$

$\therefore a = 50; b = 18; MA = 34; MG = 30$

Rpta: $MA = \frac{32 + 64}{2} = 48$

RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Es un conjunto de razones geométricas que tienen igual valor, pueden ser:

Discreta

antecedente →

consecuente →

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = k$$

← valor de las n razones
(constante)

Ejemplo: $\frac{9}{6} = \frac{15}{10} = \frac{27}{18} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Continua

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}} = k$$

← valor de las n razones
(constante)

Ejemplo: $\frac{48}{24} = \frac{24}{12} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$

PROPIEDADES:

1. La suma de antecedentes es a la suma de consecuentes, como cada antecedente es a su respectivo consecuente, es decir, el valor de la razón se mantiene constante.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n} = k = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \dots = \frac{a_n}{c_n}$$

2. Elevando las razones que intervienen al exponente racional positivo p y aplicando la propiedad (1), se obtiene:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = k$$



$$\frac{a_1^p}{c_1^p} = \frac{a_2^p}{c_2^p} = \frac{a_3^p}{c_3^p} = \dots = \frac{a_n^p}{c_n^p} = k^p$$



$$\frac{a_1^p + a_2^p + a_3^p + \dots + a_n^p}{c_1^p + c_2^p + c_3^p + \dots + c_n^p} = k^p$$

3. Del conjunto de razones:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = k$$



$$\frac{a_1 \cdot m}{c_1 \cdot m} = \frac{a_2 \cdot n}{c_2 \cdot n} = \frac{a_3 \cdot p}{c_3 \cdot p} = \dots = \frac{a_n \cdot z}{c_n \cdot z} = k$$



$$\frac{a_1 \cdot m + a_2 \cdot n + a_3 \cdot p + \dots + a_n \cdot z}{c_1 \cdot m + c_2 \cdot n + c_3 \cdot p + \dots + c_n \cdot z} = k$$

m, n, p, ..., z: diferentes de cero

4. Multiplicando todas las razones que intervienen se obtiene:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = k$$



$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \dots \cdot c_n} = k^n$$

Observación:

En el caso de razones geométricas continuas, se tiene:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = k$$

Los antecedentes tienen la forma de:

$$a_n = k \cdot a_{n+1} ; a_{n-1} = k^2 \cdot a_{n+1} ; a_{n-2} = k^3 \cdot a_{n+1} ; \dots ; a_2 = k^{n-1} \cdot a_{n+1} ; a_1 = k^n \cdot a_{n+1}$$

con lo cual el conjunto de razones geométricas continuas se escribe como:

$$\frac{k^n \cdot a_{n+1}}{k^{n-1} \cdot a_{n+1}} = \frac{k^{n-1} \cdot a_{n+1}}{k^{n-2} \cdot a_{n+1}} = \frac{k^{n-2} \cdot a_{n+1}}{k^{n-3} \cdot a_{n+1}} = \dots = \frac{k^2 \cdot a_{n+1}}{k^1 \cdot a_{n+1}} = \frac{k^1 \cdot a_{n+1}}{a_{n+1}} = k$$

5. Del conjunto de razones:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = k$$

Se deducen varias relaciones, tales como:

$$\frac{a_1 \pm c_1}{c_1} = \frac{a_2 \pm c_2}{c_2} = \frac{a_3 \pm c_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n \pm c_n}{c_n} = \frac{k \pm 1}{1}$$

$$\frac{a_1 \pm c_1}{a_1} = \frac{a_2 \pm c_2}{a_2} = \frac{a_3 \pm c_3}{a_3} = \dots = \frac{a_n \pm c_n}{a_n} = \frac{k \pm 1}{k}$$

$$\frac{a_1 + c_1}{a_1 - c_1} = \frac{a_2 + c_2}{a_2 - c_2} = \frac{a_3 + c_3}{a_3 - c_3} = \dots = \frac{a_n + c_n}{a_n - c_n} = \frac{k + 1}{k - 1}$$

$$\frac{a_1^p \pm c_1^p}{c_1^p} = \frac{a_2^p \pm c_2^p}{c_2^p} = \frac{a_3^p \pm c_3^p}{c_3^p} = \dots = \frac{a_n^p \pm c_n^p}{c_n^p} = \frac{k^p \pm 1}{1}$$

Aplicación 7:

$$\text{Si: } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_{10}}{b_{10}} = k; \quad a_i + b_i = c_i; \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, 10$$

$$x^{10} = c_1 c_2 \dots c_{10}; \quad y^{10} = a_1 a_2 \dots a_{10}; \quad z^{10} = b_1 b_2 \dots b_{10}$$

Entonces la MA(Y,Z) pertenece al intervalo:

- A) $[0,1x; 0,2x >$ B) $[0,2x; 0,4x >$ **C) $[0,4x; 0,6x >$** D) $[0,6x; 0,8x >$ E) $[0,8x; 2x >$

Resolución:

Vemos: $\frac{y^{10}}{z^{10}} = k^{10} \rightarrow \frac{y}{z} = k$

$$\frac{a_1 + b_1}{b_1} = \frac{a_2 + b_2}{b_2} = \frac{a_3 + b_3}{b_3} = \dots = \frac{a_{10} + b_{10}}{b_{10}} = k + 1$$

$$\rightarrow \frac{x^{10}}{z^{10}} = (k + 1)^{10}$$

$$\rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{z} + 1$$

$$\frac{x}{z} = \frac{y + z}{z}$$

$$x = y + z$$

Rpta: MA(y, z) = 0,5x

Aplicación 8:

En un conjunto de razones aritméticas equivalentes, la suma de los antecedentes excede a la suma de los consecuentes en 31, si se excluye una razón por lo cual la suma de los consecuentes disminuye en 8. ¿Cuál es el valor de la suma de los términos excluidos si el valor de la razón es un número entero?

A) 12

B) 15

C) 16

D) 17

E) 19

Resolución:

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = a_3 - b_3 = \dots = a_n - b_n = R$$

$$[a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n] - [b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n] = nR = 31$$

$$n = 31, R = 1 \text{ por dato: } b_i = 8 \rightarrow a_i = 8 + R = 9$$

$$\text{Rpta. } a_i + b_i = 8 + 9 = 17$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 01

Indicar si cada proposición es verdadera (V) o falsa (F) según corresponda.

- I. Si la razón armónica y la razón geométrica de dos números son iguales entonces el mayor de los dos números siempre es par.
- II. Para dos números naturales, se cumple que el promedio aritmético de la media geométrica y la media aritmética es igual al cuadrado de la media aritmética de las raíces cuadradas de dichos números.
- III. Si la media aritmética de dos números naturales es igual a su razón geométrica, entonces los números son iguales.

A) VVV

B) FVF

C) VVF

D) FVV

E) VFV

Resolución

I) (V) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > a$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \rightarrow b = a(a + 1) \rightarrow b \text{ es par}$$

$$\text{II) (V)} \quad \frac{MG(a, b) + MA(a, b)}{2} = \frac{2\sqrt{ab} + a + b}{2} = MA_{(\sqrt{a}, \sqrt{b})}^2$$

$$\text{III) (V)} \quad \frac{a + b}{2} = \frac{a}{b} = k$$

$$\rightarrow \frac{a + b}{a} = \frac{2}{b} \rightarrow 1 + \frac{b}{a} = \frac{2}{b}$$

$$\rightarrow b = \frac{2k}{k + 1} \in \mathbb{N} \rightarrow k = 1 \rightarrow a = b$$

Problema 02

La razón geométrica de dos números cuya diferencia de cuadrados es 840, se invierte al restar 14 al mayor y sumar 14 al menor. Calcule la suma de cifras del producto de dichos números.

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

Resolución

$$\frac{a}{b} = k ; \quad a^2 - b^2 = 840 \dots(1)$$

$$\frac{a - 14}{b + 14} = \frac{1}{k} = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad \underbrace{a^2 - b^2}_{840} = 14(a + b) \quad \rightarrow \quad a - b = 14 \dots(2)$$

De (1) y (2): $a + b = 60 \dots(3)$

De (2) y (3): $a = 37 ; b = 23$

$$\rightarrow a \times b = 851$$

$$\therefore \text{suma de cifras} = 14$$

Problema 03

La razón de los números A y B es $\frac{2}{3}$ y la razón de los números C y D es $\frac{5}{7}$, además, la media diferencial B y C es 22 y la tercera proporcional de A y D es 49. Calcule la tercera diferencial de (B+D) y (A+C).

- A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

Resolución

$$\frac{A}{B} = \frac{2n}{3n} \quad ; \quad \frac{C}{D} = \frac{5m}{7m} \quad \dots (*)$$

además $B + c = 44 \rightarrow 3n + 5m = 44 \dots (1)$

También $\frac{A}{D} = \frac{D}{49} \rightarrow \frac{2n}{7m} = \frac{7m}{49} \rightarrow n = \frac{m^2}{2} \dots (2)$

De (1) y (2): $m = 4 ; n = 8 \rightarrow A = 16 ; B = 24 ; C = 20 ; D = 28$

finalmente $52 - 36 = 36 - x$

$$\therefore x = 20$$

Problema 04

La diferencia del primer antecedente y el segundo consecuente de una proporción continua es 135. Si la suma de los cuatro términos de dicha proporción es 243, calcule la suma de cifras de la media proporcional.

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

Resolución

$$\frac{ak^2}{ak} = \frac{ak}{a} = k$$

Por dato: $ak^2 - a = 135 \rightarrow a(k+1)(k-1) = 135 \dots (1)$

$$a(k+1)^2 = 243 \dots (2)$$

De (1) y (2): $k = \frac{7}{2} ; a = 12$

$$\rightarrow ak = 42$$

$$\therefore \text{suma de cifras} = 6$$

Problema 5

En una proporción geométrica, cuya constante es mayor que uno, la suma de antecedentes es 161 y la diferencia de consecuentes es 44, además el primer consecuente es mayor que el último término. Calcule la tercera diferencial del segundo término y el segundo antecedente.

Resolución

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad bk + dk = 161$$

$$b - d = 44$$

$$b = 17n, \quad d = 6n$$

$$n = 4 \rightarrow b = 68 \rightarrow c = 42$$

3ra. diferencial de b y c:

$$b - c = c - x$$

$$x = \underset{84}{2c} - \underset{68}{b} = 16$$

$$\frac{k[b + d]}{b - d} = \frac{161}{44} = \frac{7(23)}{4(11)}$$

$$\rightarrow k = \frac{7}{4}$$

Rpta. A

Problema 6

Sean dos números enteros positivos, donde el producto de sus medias aritmética y armónica es igual a 6 veces su media geométrica. Calcule el menor valor positivo de la razón armónica de dichos números.

Resolución

$$MG^2 = MA \times MH$$

$$MG^2 = 6 \times MG$$

$$MG = 6$$

$$\sqrt{a \cdot b} = 6$$

$$a \cdot b = 36$$

A) $\frac{1}{36}$

B) $\frac{5}{36}$

C) $\frac{5}{12}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{3}{4}$

$$a \cdot b = 36 \rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\begin{matrix} 6 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & 9 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 12 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \frac{5}{36}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4}$$

... (menor valor)

Rpta. A

Problema 7

El menor y el mayor promedio de dos números están en la relación de 9 a 12, además el número mayor excede al número menor en 50. Calcule la tercera armónica de dichos números.

Resolución

A) $\frac{1}{50}$ B) $\frac{2}{75}$ C) 37,5 D) 15 E) 175

$$a > b$$

$$a - b = 50$$

$$a = b + 50$$

$$\frac{MH}{3} = \frac{MA}{4}$$

$$\frac{2ab}{3(a+b)} = \frac{a+b}{8}$$

$$(a+b)^2 = \frac{16ab}{3}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{10}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 3k \\ b = k \\ k = 25 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{75} - \frac{1}{25} = \frac{1}{25} - \frac{1}{x}$$

$$x = 15$$

Rpta.D

Problema 8

Los volúmenes de tres recipientes están en la relación de 2, 1 y 3; en cada recipiente se ha mezclado dos clases de vino A y B, de tal manera que en el primer recipiente la relación es de 1 a 3, en el segundo de 4 a 5 y en el tercero de 2 a 1, respectivamente. Si el volumen total del vino de clase B es de 55 litros, calcule la razón armónica de los volúmenes del primer y tercer recipiente.

- A) 108 B) 84 C) $\frac{1}{54}$ D) $\frac{1}{84}$ E) $\frac{1}{108}$

Resolución

Recipiente	A	B
1° Vol 2k	1	3
2° Vol k	4	5
3° Vol 3k	2	1

$$\frac{3}{4} \times 2k + \frac{5}{9} \times k + \frac{1}{3} \times 3k = 55$$

$$k = 18$$

$$R_H = \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k} = \frac{1}{6k} = \frac{1}{108}$$

Rpta. E

Problema 09

Un automóvil recorre un trayecto desde la ciudad A hasta la ciudad B, y luego regresa a la ciudad A, además las velocidades que emplea el automóvil ida y vuelta están en la relación de 13 a 7, respectivamente. Si el tiempo total empleado es de 2 horas y 40 minutos, calcule la suma de cifras de la cantidad de minutos que emplea el automóvil en regresar a la ciudad A.

A) 5

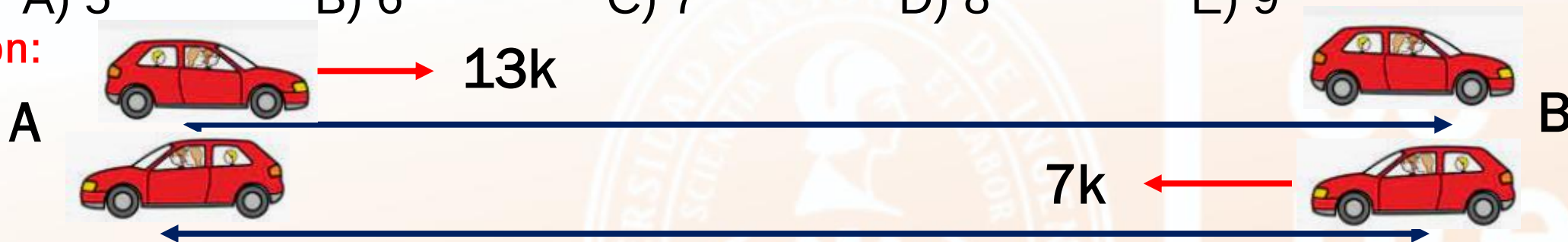
B) 6

C) 7

D) 8

E) 9

Resolución:



De ida: $\overline{AB} = (13K)(t_1)$, De vuelta: $\overline{AB} = (7K)(t_2)$

$$(7K)(t_2) = (13K)(t_1) \Rightarrow \frac{t_1}{7} = \frac{t_2}{13} = \frac{t_1 + t_2}{7 + 13} = \frac{160}{20} = 8$$

$$(t_2) = (13)(8) = 104, \text{ suma de cifras} = 5$$

CLAVE A

Problema 10

Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{r}{m} = k$, ($k < 1$), además $2m + n + r = 25$ y $m < n$, $p < q < r$, entonces $m + n + p + q + r$ es

A) 20

B) 24

C) 28

D) 30

E) 32

Resolución:

$$\frac{r}{m} = \frac{m}{n} = k \Rightarrow \begin{matrix} r = nk^2 \\ m = nk \end{matrix} \Rightarrow 2nk + n + nk^2 = 25$$

$$n(2k + 1 + k^2) = 25 \Rightarrow n(k + 1)^2 = 25 \Rightarrow n(k + 1)^2 = 9 \times \frac{25}{9}$$

$$n = 9 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow m = 6 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2}{3}$$

$$m + n + p + q + r = 6 + 9 + 2 + 3 + 4 = \mathbf{24}$$

CLAVE B

Problema 11

La suma de los cuatro términos de una proporción aritmética es 68. Si el producto de los términos medios es al producto de los términos extremos como 35 es a 26, calcule la razón entre el producto de los dos últimos términos y el producto de los dos primeros términos.

A) $7/26$

B) $13/35$

C) $7/65$

D) $14/65$

E) $16/35$

Resolución:

$$a - b = c - d \Rightarrow a + b + c + d = 68 \Rightarrow a + d = b + c = 34$$

$$\frac{bc}{ad} = \frac{35}{26} = \frac{7 \times 5}{13 \times 2} = \frac{20 \times 14}{26 \times 8} \Rightarrow 26 - 20 = 14 - 8$$

$$R = \frac{14 \times 8}{26 \times 20} = \frac{14}{13 \times 5} = \frac{14}{65}$$

CLAVE D

Problema 12

Considere cuatro razones aritméticas continuas equivalentes, de tal manera que la suma de los antecedentes excede a la suma de los consecuentes en 28 unidades; además el primer y último término son entre sí como 9 es a 5, calcule la suma de todos los términos de las cuatro razones aritméticas continuas

A) 180

B) 192

C) 210

D) 245

E) 392

Resolución:

$$a - b = b - c = c - d = d - e = R \quad \Rightarrow$$

$$a + b + c + d + e = b + c + d + e + 28$$

$$a - e = 28 = 4R, \quad \frac{a}{9} = \frac{d}{5} = \frac{a - d}{9 - 5} = \frac{28}{4} = 7$$

$$a = 63, e = 35$$

$$S = 63 + 56 + 56 + 49 + 49 + 42 + 42 + 35 =$$

$$d = 35 + 7 = 42$$

$$c = 42 + 7 = 49$$

$$b = 49 + 7 = 56$$

CLAVE E

Problema 13

La media aritmética y la media geométrica de dos números enteros positivos se diferencian en 6 unidades y la suma de las raíces cuadradas de estos números enteros es $6\sqrt{3}$. Calcule la media armónica de dichos enteros.

A) 17,3

B) 17,6

C) 18,3

D) 18,7

E) 19,2

Resolución:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 6 \Rightarrow \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{a}^2 - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b}^2}{2} = 6$$

$$[\sqrt{a} - \sqrt{b}]^2 = 12 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 6\sqrt{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sqrt{a} = 4\sqrt{3} \rightarrow a = 48 \\ \sqrt{b} = 2\sqrt{3} \rightarrow b = 12 \end{array}$$

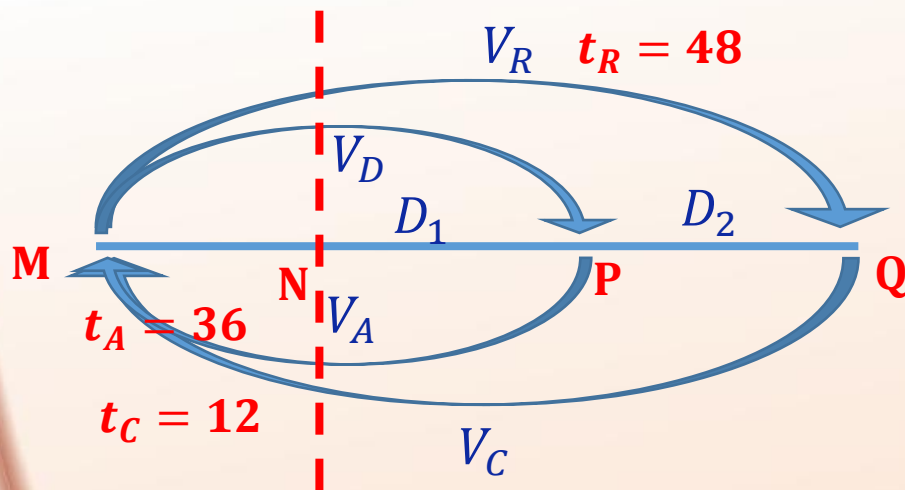
$$MH[a, b] = MH[48, 12] = \frac{2 \times 48 \times 12}{48 + 12} = \frac{96}{5} = 19,2$$

CLAVE E

Problema 14 Sobre una pista rectilínea se ubican los puntos M, N, P y Q (en ese orden). Daniella y Ruth desde M partirán rumbo a P y Q, respectivamente, mientras que Azucena partirá de P hacia M y Cristhina partirá de Q hacia M. Si todas salen simultáneamente y se encuentran en N a las 3:28 pm, luego se observa que Cristhina llega a su destino a las 3:40 pm y 24 minutos después Azucena llega a su destino. Si Ruth llega a Q a las 4:16 pm y cada una de ellas mantiene su rapidez constante, calcule la hora en que Daniella llegó a P.

- A) 3:40 pm **B) 3:44 pm** C) 3:48 pm D) 4:00 pm E) 4:05 pm

Resolución:



$$\left. \begin{aligned} \frac{36}{V_A} &= \frac{12}{V_C} \\ D_1 + D_2 &= V_C t \\ D_1 &= V_A t \end{aligned} \right\} D_2 = 2D_1$$

$$V_R = V_D$$

$$D_2 + D_1 = V_R t_R \Rightarrow 3D_1 = 48V_R \rightarrow V_R = \frac{D_1}{16}$$

$$\rightarrow D_1 = V_D t_D = \frac{D_1}{16} t_D \Rightarrow t_D = 16$$

$$\Rightarrow 3:28 + 16 = 3:44$$

Problema 15

Las edades de César y Diego están en la relación de 7 a 5 respectivamente, dentro de m años estarán en la relación de 7 a 6 y hace n años estaban en la relación de 8 a 5. Calcule: $m - n$, si se sabe que la edad de que tendrá César dentro de m años excede a la edad que tenía Diego hace n años en 64.

A) 24

B) 27

C) 28

D) 30

E) 32

Resolución:

$$\frac{C}{D} = \frac{7}{5} \rightarrow C = 7k \wedge D = 5k$$

$$\frac{C + m}{D + m} = \frac{7}{6} \rightarrow \frac{7k + m}{5k + m} = \frac{7}{6} \Rightarrow 7k = m$$

$$\frac{C - n}{D - n} = \frac{8}{5} \rightarrow \frac{7k - n}{5k - n} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{5k}{3} = n$$

$$(C + m) - (D - n) = 64$$

$$(7k + 7k) - (5k - \frac{5k}{3}) = 64$$
$$\rightarrow k = 6$$

$$m - n = 7k - \frac{5k}{3} = 42 - 10 = 32$$

Problema 16

Si la razón aritmética de dos números es 24, además la diferencia entre su media aritmética y media geométrica es 6, entonces la media armónica de dichos números es

A) 4,2

B) 4,5

C) 4,8

D) 5,4

E) 6,4

Resolución:

$$A - B = 24 \rightarrow A = 24 + B$$

$$\frac{A + B}{2} - \sqrt{AB} = 6$$

$$\frac{24 + B + B}{2} - \sqrt{(24 + B)B} = 6$$

$$12 + B - \sqrt{(24 + B)B} = 6$$

$$6 + B = \sqrt{(24 + B)B}$$

$$36 + 12B + B^2 = 24B + B^2$$

$$B = 3 \rightarrow A = 27$$

$$\frac{2AB}{A + B} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 27}{30} = \frac{27}{5} = 5,4$$

Problema 17

Las edades de tres amigas Marilyn, Rosario y Sara están en la relación de a , b y 8 , respectivamente, además la suma de las edades de las Marilyn y Rosario es igual a la edad de Sara. Dentro de 3 años sus edades estarán en la relación de 4 , c y d , y dentro de 5 años más sus edades sumarán 72 años. Calcule $a + b + c + d$.

A) 19

B) 20

C) 21

D) 22

E) 23

Resolución:

$$\frac{M}{a} = \frac{R}{b} = \frac{S}{8} \quad \wedge \quad M + R = S$$

$$(M + 8) + (R + 8) + (S + 8) = 72$$

$$M + R + S = 48$$

$$\rightarrow S = 24$$

$$\frac{M}{a} = \frac{R}{b} = 3 \rightarrow a + b = 8$$

$$\frac{M + 3}{4} = \frac{R + 3}{c} = \frac{S + 3}{d}$$

$$\frac{30}{4 + c} = \frac{27}{d} \rightarrow 10d = 36 + 9c$$

$$\begin{matrix} 9 & 6 \\ 18 & 16 \end{matrix}$$

$$\rightarrow a + b + c + d = 8 + 6 + 9 = 23$$

Problema 18

En cierta aula de clases de una escuela existen 70 alumnos, entre hombres y mujeres. Por cada 3 mujeres hay 4 hombres. Al finalizar el año desaprobaron la cuarta parte de los hombres, e igual número de mujeres que de hombres. Entonces, la razón entre el número de mujeres y el número de hombres que pasaron de año es:

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{5}{7}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{7}{5}$

E) $\frac{3}{2}$

Resolución

Colocando los datos en una tabla de doble entrada:

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
APROBARON	30	20	50
DESAPROBARON	10	10	20
TOTAL	40	30	70

$$\therefore \frac{M_A}{H_A} = \frac{2}{3}$$

Problema 19

En una proporción geométrica de razón $\frac{5}{4}$, la suma de los términos es 45 y la diferencia de los consecuentes es 4. Calcule el mayor de los términos de la proporción.

A) 12

B) 15

C) 16

D) 18

E) 20

Resolución

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5m}{4m} = \frac{5n}{4n} = \frac{5}{4}$

Dato: $9m + 9n = 45 \Rightarrow m + n = 5$
Además: $4m - 4n = 4 \Rightarrow m - n = 1$

$\left. \begin{array}{l} m + n = 5 \\ m - n = 1 \end{array} \right\} m = 3 \quad n = 2$

∴ El término mayor es $5m = 15$

Problema 20

Se observan tres frascos que contienen caramelos en la relación de 3; 4 y 8. Se les debe acomodar de tal manera que en cada frasco se tenga igual cantidad de caramelos; para ello se pasan 24 caramelos; del tercer frasco al segundo y luego n caramelos del segundo al primer frasco. Calcule el valor de n .

A) 16

B) 15

C) 14

D) 13

E) 12

Resolución



Al inicio:

 $3k$
 $4k$
 $8k$

1° Pasada:

 $3k$
 $4k + 24$
 $8k - 24$

2° Pasada:

$$3k + n = 4k - n + 24 = 8k - 24$$

Resolviendo:

 $K = 8$
 $n = 16$

CLAVE A

Problema 21

En una reunión social se observa que por cada 5 varones hay 7 mujeres, luego del baile se retiran m parejas y la relación cambia de 2 a 3, después de la comida llegan n parejas y la nueva relación es de 5 a 6, respectivamente. Si la cantidad de varones al final excede a la cantidad de mujeres al inicio en 9, calcule la tercera proporcional de m y n .

A) 108

B) 124

C) 184

D) 216

E) 248

Resolución

Al inicio: $V = 5k$

$$M = 7k$$

Si se retiran m parejas: $\frac{5k - m}{7k - m} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = m$

Si llegan n parejas: $\frac{5m - m + n}{7m - m + n} = \frac{5}{6} \Rightarrow n = 6m$

Además: $V_F - M_I = 9 \Rightarrow (5m - m + n) - (7k) = 9 \Rightarrow m = 3 \quad n = 18$

Sea x la tercera proporcional: $\frac{3}{18} = \frac{18}{x} \therefore x = 108$

CLAVE A

Problema 22

La media geométrica de dos números es $15\sqrt{3}$, además la media aritmética y la media armónica de dichos números son dos números impares consecutivos. Calcule la suma de cifras del cuadrado de la diferencia de dichos números.

A) 7

B) 8

C) 9

D) 10

E) 12

Resolución

$$ab = 675$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = 2$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{1350}{a+b} = 2$$

$$a+b = x$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1350}{x} = 2$$

$$x^2 - 4x = 2700$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2704$$

$$[x-2]^2 = 52^2$$

$$a+b = 54$$

$$ab = 675$$

$$54^2 - 4 \times 675 = [a-b]^2$$

$$216 = [a-b]^2$$

$$\text{Suma de cifras} = 9$$

CLAVE C

Problema 23

En la siguiente igualdad de razones geométricas equivalentes de términos y constante enteros positivos: $\frac{a+7}{b+7} = \frac{2a-1}{b+16} = \frac{a-3}{b+1}$. Calcule la media diferencial de a y b .

A) 12

B) 15

C) 16

D) 17

E) 20

Resolución

$$\frac{a+7}{b+7} = \frac{2a-1}{b+16} = \frac{a-3}{b+1} = \frac{[a+7] - [a-3]}{[b+7] - [b+1]} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{[2a-1] - [a+7]}{[b+16] - [b+7]} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a-8}{9} = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 23$$

$$\frac{a+7}{b+7} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{30}{b+7} = \frac{5}{3} \Rightarrow b = 11 \quad MA(a, b) = \frac{23 + 11}{2} = 17$$

CLAVE D

Problema 24

Si se cumple: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$, donde k es un entero positivo, y que

$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2^2 - a_3^2}{b_2^2 - b_3^2} = 6$, entonces el valor de k es:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Resolución:

$$k + k^2 = 6$$

$$k = 2$$

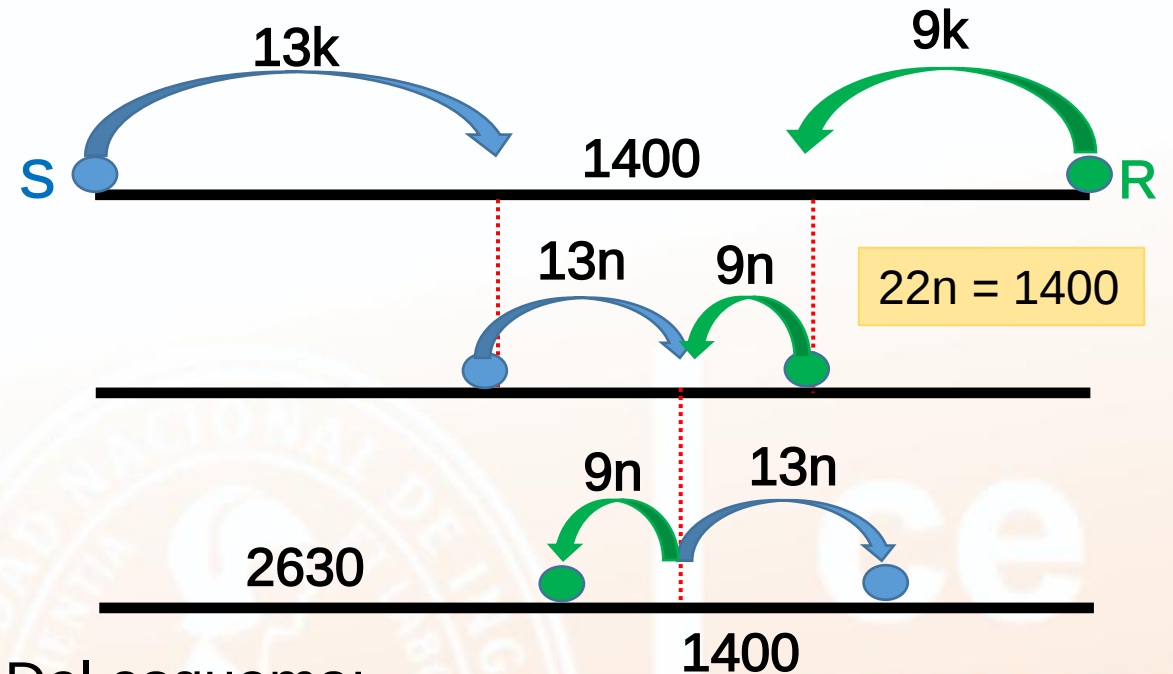
CLAVE B

PROBLEMA 25

El ciclista Sebastián parte de la ciudad A hacia la ciudad B, en el mismo instante el ciclista Rodrigo parte de la ciudad B hacia la ciudad A. Las velocidades de estos ciclistas están en la relación de 39 a 27, respectivamente. Determine la suma de cifras de la distancia entre ambas ciudades, si cuando estaban separados 1 400 m por segunda vez a Rodrigo le faltaban 2 630 m para llegar a su destino.

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución:



Del esquema:

$$13k + 13n = 2630 + 9n \rightarrow 13k = 2630 - 4n$$

$$13k = 2630 - 4 \left(\frac{1400}{22} \right) \rightarrow k = \frac{2010}{11}$$

Distancia entre las dos ciudades:

$$22k + 1400 = 5420$$

Suma de cifras 11

PROBLEMA 26

Sabiendo que $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{D}{d}$, y además $(A + a)(B + b)(D + d) = M^3$. Calcule:

D. $\sqrt[3]{\frac{AB}{D^2}} + d \cdot \sqrt[3]{\frac{ab}{d^2}}$

A) M

B) $\sqrt[3]{M}$

C) $\sqrt[3]{\frac{M}{2}}$

D) M^3

E) M^2

Resolución:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{D}{d} = k$$



$$(A + a)(B + b)(D + d) = M^3$$

$$(ak + a)(bk + b)(dk + d) = M^3$$

$$abd(k + 1)^3 = M^3 \quad \dots (*)$$

Luego:

D. $\sqrt[3]{\frac{AB}{D^2}} + d \cdot \sqrt[3]{\frac{ab}{d^2}}$



$$\sqrt[3]{ABD} + \sqrt[3]{abd}$$

$$\sqrt[3]{abdk^3} + \sqrt[3]{abd}$$

$$\sqrt[3]{abd} (k + 1) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}$$

Problema 27

Gabriel tiene cuatro toneles con vino en cantidades que son proporcionales a 9, 3, 7 y 8. Su amigo David realiza una reunión y le pide a Gabriel que le proporcione vino, por ello Gabriel decide mezclar todo el vino en un solo recipiente, y como en dicha reunión solo se consume la tercera parte, Gabriel decide distribuir lo que queda en partes iguales en los cuatro toneles originales. Si uno de los toneles aumenta en 36 litros, calcule la cantidad de litros de vino que Gabriel tenía inicialmente.

A) 564

B) 625

C) 648

D) 712

E) 720

Resolución:

Al inicio:

108k

36k

84k

96k



9

3

7

8

 $Total = 324k$

$$v = \frac{2}{3} \times \frac{324k}{4} = 54k$$

$$54k - 36k = 36 \rightarrow k = 2$$

$$Total = 324 \times 2 = 648$$

CLAVE C

Problema 28

Si $\frac{d}{70} = \frac{198}{a} = \frac{b}{28} = \frac{44}{c} = \frac{m}{91}$, además a, d, b y c forman una proporción aritmética. Calcule la suma de cifras de m .

A) 8

B) 9

C) 10

D) 11

E) 12

Resolución:

$$a - d = b - c$$

$$\frac{198}{k} - 70k = 28k - \frac{44}{k}$$

$$\frac{242}{k} = 98k \rightarrow k = \frac{11}{7}$$

$$m = 91 \left(\frac{11}{7} \right) = 143$$

$$\Sigma \text{cifras} = 8$$

Problema 29

La media armónica y la media geométrica de dos números naturales están en la relación de 84 a 91. Si la media aritmética excede a 25 tanto como este excede a la media geométrica de dichos números, calcule la razón de los dos números originales.

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{2}{3}$

Resolución:

$$\frac{MH}{MG} = \frac{84}{91} = \frac{12}{13} \rightarrow MH = 12k$$

$$\rightarrow MG = 13k$$

$$MA \cdot MH = MG^2$$

$$\rightarrow MA = \frac{169}{12}k$$

$$MA - 25 = 25 - MG$$

$$\frac{169}{12}k - 25 = 25 - 13k$$

$$\rightarrow k = \frac{24}{13}$$

$$MA = \frac{169}{12} \cdot \frac{24}{13} = 26 \rightarrow a + b = 52$$

$$MG = 13 \cdot \frac{24}{13} = 24$$

$$26^2 - 24^2 = \left(\frac{a - b}{2} \right)^2 \rightarrow a - b = 20$$

$$\rightarrow \frac{b}{a} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Problema 30

Las edades de Shayla, Micaela y Jimena están en la relación de 7, 9 y 4, respectivamente. Si hace 8 años la razón aritmética de las edades de las dos mayores era 10 años, calcule la suma de cifras de la cantidad de años que debe transcurrir para que la relación de las edades de las dos menores sea de 12 a 17.

A) 7

B) 9

C) 12

D) 16

E) 18

Resolución:

$$S = 7k = 35$$

$$M = 9k = 45$$

$$J = 4k = 20$$

$$9k - 8 - (7k - 8) = 10$$

$$\rightarrow k = 5$$

$$\frac{20 + n}{35 + n} = \frac{12}{17}$$

$$\rightarrow n = 16$$

$$\Sigma \text{cifras} = 7$$